

1. Låt $f(z) = 1/z$. Då är $\Re(f(z)) = x/(x^2 + y^2) = u(x, y)$, och om vi låter $v(x, y) = \Im(1/z) = \Im(\bar{z}/|z|^2) = -y/(x^2 + y^2)$ är $f = u + iv$ holomorf på $G = \mathbb{C} - \{0\}$.

Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} |x/(x^2 + y^2)| = \infty$ då $y = 0$ är G maximal — det finns ingen funktion f som är holomorf vid $z = 0$ så att $\Re(f) = u$.

2. Låt $f(z) = 1/(1 + z^2)^2$ och låt γ_R beteckna halvcirkeln given av $\{Re^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$. Eftersom f är holomorf bortsett från poler vid $z = \pm i$ är, för $R > 1$,

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=i}(f(z)).$$

Eftersom $|\int_{\gamma_R} f| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$ ser vi att $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f = 0$ och således är $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=i}(f(z))$.

Skriv $f(z) = g(z)/(z - i)^2$ där $g(z) = 1/(z + i)^2$. Taylorutveckling av $g(z)$ vid $z = i$ ger $g(z) = 1/(2i)^2 + g'(i)(z - i) + O((z - i)^2)$. Då $g'(z) = -2/(z + i)^3$ är $g'(i) = -2/(2i)^3 = -i/4$ och således är $\text{Res}_{z=i}(f(z)) = -i/4$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i(-i/4) = \pi/2.$$

3. Eftersom $F(z) = z^2/2 + z^3/3$ är en primitiv funktion till $f(z)$ så är

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 1/2 + 1/3 = 5/6$$

då $\gamma(0) = 0$ och $\gamma(1) = 1$.

4. Skriv $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där $ad - bc \neq 0$.

- Fall 1, $c = 0$: vi noterar först att $a, d \neq 0$ då $ad \neq 0$. $M(z) = (a/d)z + b/d = z$ har en unik lösning $z \in \mathbb{C}$ om $a/d \neq 1$. Om $a/d = 1$ och $b = 0$ är alla $z \in \mathbb{C}$ fixpunkter. Om $a/d = 1$ och $b \neq 0$ är ∞ en fixpunkt.
- Fall 2, $c \neq 0$: För $z \neq -d/c$ kan $M(z) = z$ skrivas om som

$$(az + b) = z(cz + d) = cz^2 + dz$$

som har minst en komplex rot, säg z_0 . Om $z_0 \neq -d/c$ är $M(z_0) = z_0$. Fallet $z_0 = -d/c$ kan uteslutas då $(az_0 + b) = z_0(cz_0 + d) = 0$ ger att $az_0 + b = 0$ vilket implicerar att $a(-d/c) + b = (-ad + bc)/c = 0$.

5. Se boken.

6. Låt $g_N(z) = \sum_{n=0}^N z^n$; då konvergerar g_N likformigt mot $1/(1-z)$ på $C[0, 1/2]$ och även $e^{1/z}g_N(z)$ konvergerar likformigt mot $e^{1/z}/(1-z)$ på $C[0, 1/2]$ och vi får

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C[0, 1/2]} e^{1/z} g_N(z) dz = \int_{C[0, 1/2]} e^{1/z} / (1-z) dz.$$

Eftersom $e^{1/z}g_N(z)$ är holomorf på $D[0, 1] - \{0\}$ representeras den av en Laurentserie;

$$e^{1/z}g_N(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,N} z^k.$$

$$\text{och } \int_{C[0, 1/2]} e^{1/z} g_N(z) dz = 2\pi i c_{-1,N}.$$

Då $e^{1/z} = \sum_{k \geq 0} z^{-k}/(k!) = 1 + 1/z + 1/(2z^2) + 1/(6z^3) + \dots$ och $g_N(z) = 1 + z + \dots + z^N$ ser vi att

$$c_{-1,N} = 1 + 1/2 + 1/6 + \dots + 1/(N+1)!$$

. Således är $\int_{C[0, 1/2]} e^{1/z}/(1-z) dz = 2\pi i \lim_{N \rightarrow \infty} c_{-1,N} = 2\pi i(e-1)$.

7. Låt $G = \{z : \Re(z) \geq 2\}$, och låt $S_N(z) = \sum_{n=1}^N n^{-z}$. Då $|n^{-z}| = n^{-\Re z} \leq n^{-3/2}$ för $\Re z \geq 3/2$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} < \infty$ ser vi att $S_N(z)$ konvergerar likformigt mot $\zeta(z)$ (på $\{z : \Re(z) \geq 2\}$) då $N \rightarrow \infty$. Då $n^{-z} = \exp(-z \log n)$ är hel för $n \geq 1$ är även $S_N(z)$ en hel funktion och $\int_{\gamma} S_N = 0$ för alla slutna $\gamma \subset G$. Eftersom konvergensen är likformig gäller även att $\int_{\gamma} \zeta(z) = 0$ för alla slutna $\gamma \subset G$. Moreras sats ger nu att $\zeta(z)$ är holomorf på G .