

---

Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1691, Komplex Analys, den 19 augusti 2024 kl 14.00-17.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

**OBS:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Avgör om det finns några Möbiusavbildningar  $M$  som avbildar punkterna 1, 2, 3, 4 på punkterna 2, 3, 4, 6, och bestäm alla sådana om de existerar.

Avbildningen  $M(z) = z + 1$  är den *unika* Möbiusavbildningen som avbildar 1, 2, 3 på 2, 3, 4, men den avbildar ej 4 på 6. Således existerar ingen sådan Möbiusavbildning.

2. Finn en Laurentserie för  $\frac{1}{z(z-2)^2}$  centrerad vid  $z = 2$ , och ange konvergensområdet.

Eftersom

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1/2)^k (z-2)^k$$

får vi Laurentserien

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1/2)^k (z-2)^{k-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n+2}}{2} (z-2)^n.$$

Serien konvergerar absolut för  $0 < |z-2| < 2$ , men inte i någon större disk eftersom  $\frac{1}{z(z-2)^2}$  har en pol i  $z = 0$ .

3. Låt  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Finn en konform avbildning  $f$  från  $A$  till  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  så att  $f(\frac{1+i}{2}) = 0$ .

Avbildningen  $g(z) = z^2$  avbildar  $A$  konformt på  $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  eftersom den är analytisk och har nollskild derivata, och  $g((1+i)/2) = i/2$ . Vi söker en Möbiusavbildning  $M(z)$  som avbildar  $i/2$  på noll, och randen till  $H$  på randen av  $D$ ; t.ex.  $M(z) = \frac{z-i/2}{z+i/2}$  avbildar  $i/2$  på noll och den realla axeln på randen till  $D$ .

Sammansättningen  $f = M \circ g$  har då den sökta egenskapen. Svar:  $f(z) = \frac{z^2-i/2}{z^2+i/2}$ .

4. Låt  $f$  vara analytisk i en öppen mängd som innehåller  $\overline{D}[w, R]$ . Visa att

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C[w,R]} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Se boken.

5. Låt  $n \geq 1$  vara ett heltal och låt  $f$  vara en hel funktion som uppfyller  $|f(z)| \leq |z|^{n+1/2}$  för alla  $z$  så att  $|z| \geq 1000$ . Visa att  $f$  är ett polynom av grad högst  $n$ .

Enligt Cauchys formel för derivator gäller

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

---

som ger uppskattningen

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi R \frac{R^{n+1/2}}{R^{k+1}} = k! R^{n+1/2-k}$$

för  $R > 1000$ . Om vi låter  $R \rightarrow \infty$  ser vi att  $f^{(k)}(0) = 0$  för  $k > n$ .  $f$  har således en ändlig Taylorserie och  $f$  måste då vara ett polynom av grad högst  $n$ .

---

6. Hur många rötter har ekvationen  $z^5 + 10z - 1 = 0$  för  $1 < |z| < 2$ ?

---

Låt  $f(z) = z^5 + 10z - 1$ . Ur Rouches sats följer, då  $|z|^5 > |10z - 1|$  på  $C[0, 2]$ , att  $f(z)$  har fem rötter i  $D[0, 2]$ . PSS, då  $|10z - 1| > |z|^5$  på  $C[0, 1]$  har  $f(z)$  en rot i  $D[0, 1]$ , och inga rötter på  $C[0, 1]$ . Således har  $f(z)$  fyra rötter som uppfyller  $1 < |z| < 2$ .

---

7. Låt  $a_1, \dots, a_n \leq 10$  vara distinkta reella tal, och låt  $F(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{10}(s-a_i)}$ . Givet ett reellt tal  $t > 0$ , beräkna

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} F(s) e^{st} ds$$

där  $\gamma_R$  betecknar den vertikala linjen mellan  $17 - iR$  och  $17 + iR$ .

---

Låt  $X_R$  beteckna rektangeln med hörn i de fyra punkterna  $17 \pm iR$  och  $-R^{1/2} \pm iR$ , med positive orientering. För  $R$  tillräckligt stort innehåller  $X_R$  punkterna  $a_1, \dots, a_n$ . Eftersom  $F(s)e^{st}$  är holomorf bortsett från poler i  $s = a_1, \dots, a_n$ , av ordning ett, ger residysatsen att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{X_R} F(s) e^{st} ds &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{s=a_i} \left( \frac{e^{st}}{\prod_{j=1}^{10}(s-a_j)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{e^{a_i t}}{\prod_{1 \leq j \leq 10, j \neq i} (a_i - a_j)} \end{aligned}$$

Om vi låter  $V_R$  beteckna den vertikala linjen från  $-R^{1/2} + iR$  till  $-R^{1/2} - iR$ , och  $H_{\pm, R}$  de två horisontella linjerna mellan  $17 + iR$  och  $-R^{1/2} + iR$  samt  $-R^{1/2} - iR$  och  $17 - iR$  får vi

$$\int_{X_R} F(s) e^{st} ds = \int_{\gamma_R} F(s) e^{st} ds + \int_{V_R} F(s) e^{st} ds + \int_{H_{+, R}} F(s) e^{st} ds + \int_{H_{-, R}} F(s) e^{st} ds$$

För tillräckligt stora  $R$  är  $|F(s)e^{st}| = O(e^{17t}/R^n)$  på både  $H_{-, R}$  och  $H_{+, R}$ , och således är

$$\int_{H_{+, R}} F(s) e^{st} ds + \int_{H_{-, R}} F(s) e^{st} ds = O(e^{17t} \sqrt{R}/R^n) = O(e^{17t}/\sqrt{R}).$$

För tillräckligt stora  $R$  är dessutom  $|F(s)e^{st}| = O(e^{-\sqrt{R}t}/R^n)$  på  $V_R$ , vilket ger att

$$\left| \int_{V_R} F(s) e^{st} ds \right| = O(e^{-\sqrt{R}t}/R^{n-1})$$

Vi får således, eftersom  $t > 0$ , att

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{X_R} F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \frac{e^{a_i t}}{\prod_{1 \leq j \leq 10, j \neq i} (a_i - a_j)}$$

---